# SUPPLEMENTO

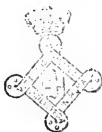
ALLA

# MEMORIA

DI

GIUSEPPE AVANZINI

INTITOLATA

*DELLA VERA LEGGE DELL' URTO DE' FLUIDI CONTRO OSTACOLI MOBILI*

PADOVA

NELLA STAMPERIA DEL SEMINARIO

MDCCCXIII.

1. Nel §. 17. della *Memoria sopra la vera legge dell' urto de' fluidi contro ostacoli mobili*, e nei §§. 30, 33 dell' *Appendice alle nuove ricerche* ecc., ho affermato 1.° che il chiariss. Autore della soluzione analitica del *Problema del moto dell' acqua nella canna dell' Ariete Idraulico* non ha provato, che la forza motrice di quell'acqua possa stimarsi, siccome egli fece (1), con la formola comunemente adottata dell'urto de' fluidi. 2.° Che la forza motrice dell'acqua nella canna dell' Ariete Idraulico dee valutarsi con la formola dell' urto de' fluidi desunta dalle sperienze colle quali ho convinta di falsità la Teoria della resistenza de' fluidi del Sig. Georgio Juan.

Poco dopo la pubblicazione dei suddetti miei scritti, uscì alla luce un' altra opera (2) dello stesso Cel. Matematico, nella quale, dopo di avere nei §§. 128, 129, 130 esposto il ragionamento ed il metodo con cui nella prima opera aveva sciolto il problema suddetto, soggiunge: *ho riferito tutto questo discorso per mostrare come taluno siasi ingannato alloraquando ha asserito, che nella soluzione del summentovato problema non era dichiarata la ragione, per la quale quella forza motrice era stimata colla formola dell' urto de' fluidi; da tale inganno poi ne è derivato uno anche peggiore, ch' egli cioè si è dato ad intendere di avere riempiuta questa lacuna senza che si possa comprendere in qual modo*.

Da queste parole scorgesi ad evidenza che il sopra lodato Matematico crede di avere con quel discorso dimostrato esser falsa la prima delle mie proposizioni, e che inoltre egli stima non potersi comprendere le prove della seconda.

Per l'importanza dell' argomento ho quindi creduto necessario in questo Supplemento di esaminar diligentemente 1.° Se in effetto da quel discorso possa inferirsi, che la forza motrice dell' acqua nella canna dell' Ariete Idraulico abbia ad essere espressa con la formola ordinaria dell' urto de' fluidi. 2.° Se le prove

(1) Trattato dell' Ariete Idraulico del Sig. Cav. Brunacci.

(2) Compendio del Calcolo sublime.

da me recate a dimostrare che la detta forza vuol essere valutata con la formola desunta dalle mie sperienze, sieno intelligibili e concludenti.

## ESAME DELLA I.ª QUESTIONE.

2. Alla piccola luce *e e* ( fig. 2. ) aperta nella parete di un gran recipiente d'acqua *hebd* inesausto, è congiunto un breve tubo conico *ceaa* che ne seconda presso a poco la vena. Al tubo *ae* è unita una sottile e lunga canna cilindrica orizzontale *ca* guarnita nella opposta bocca *cc* di un orlo o telajo che la restringe. La bocca è chiusa per modo che l'acqua tanto del recipiente quanto della canna sono in perfetta quiete. Se tutto ad un tratto si aprirà la bocca *o*, è manifesto che l'acqua incomincierà a sgorgare ed a correre nella canna spintavi dalla pressione, o dall'urto che voglia chiamarsi, dell'acqua soprastante del vaso.

Le ragioni per le quali il summentovato Matematico crede, che la forza motrice dell'acqua nella canna dell'Ariete Idraulico possa stimarsi con la formola dell'urto de' fluidi sono 1.° perchè quella forza consiste, o può supporsi consistere nell'urto dell'acqua del grande recipiente inesausto *ed* sull'acqua della canna *ac*; 2.° perchè l'espressione dell'urto dell'acqua del recipiente *ed* sull'acqua della canna *ac* dee computarsi con la formola generalmente adottata dell'urto de' fluidi in virtù del seguente ragionamento.

Se non vi fosse la canna, l'acqua uscirebbe da *aa* con la velocità *c* dovuta all'altezza del livello *hd* dell'acqua sopra *aa*. Il getto incontrando la colonna fluida *ac* moventesi con velocità *v* urterà la colonna medesima con la velocità relativa $(c-v)$. Ora questo caso è precisamente simile a quello dell'urto d'una vena orizzontale, la quale sgorgasse da *aa* con la velocità *c*, e andasse ad urtare un piano *a* eguale alla sezione della vena, e moventesi con velocità *v*. Ma dalle esatte sperienze del Sig. Zuliani, e Ferrari risulta, che l'urto d'una vena contro un piano fermo, e della grandezza della sezione della vena è eguale all'area percossa del piano nel mezzo quadrato della velocità della vena medesima, dunque del pari anche l'urto dell'acqua del recipiente contro l'acqua della canna *ac* dovrà essere $\frac{a(c-v)^2}{2}$

3. Non potendo sulla prima delle surriferite ragioni cader dubbio alcuno, rimarrà da esaminarsi se sia egualmente giusto il ragionamento al quale è appoggiata la seconda.

Da quanto abbiamo di sopra accennato intorno a questo ragionamento chiaro apparisce ch'esso è tutto, ed essenzialmente fondato sopra la Ipotesi, che il caso dell'urto della vena contro il piano mobile, sia perfettamente simile al caso dell'urto dell'acqua del recipiente contro l'acqua pur mobile della canna;

di modo che essendo $\frac{a(c-v)^2}{2}$ l'urto della vena, anche l'urto dell'acqua del recipiente esser deve $\frac{a(c-v)^2}{2}$.

4. Ora io dico: da quel ragionamento non potersi inferire che la forza motrice dell'acqua nella canna dell'Ariete si abbia da computare con la formola dell'urto della vena

1.° perchè non è altrimenti vero che i due casi sieno simili, stante che il moto dell'acqua della vena per lo scontro del piano è d'assai diverso dal moto dell'acqua del recipiente per lo scontro dell'acqua della canna.

2.° perchè non essendo simili questi due moti, esser devono, e sono realmente dissimili le espressioni dei due urti.

## I.

### DISSIMIGLIANZA DEI DUE MOTI.

*Moto dell'acqua della vena.*

5. Sia $hvv'h'$ (fig. 1.) una vena orizzontale la quale sgorgando da una piccola luce circolare $hh'$ d'un vaso inesausto vada a colpire con velocità $c$ un piano fermo $oo'$ parimente circolare, e della grandezza della sezione della vena. Si comprenderà facilmente

1.° Che per lo scontro del piano, e per essere la vena libera da potersi espandere lateralmente, i filetti $hv$, $de$, $h'v'$ ecc. dovranno sviarsi dalle loro direzioni rettilinee $de$, $hv$, $h'v'$ in qualche punto, per esempio $e$, $v$, $v'$, e muoversi per le linee $neco$, $nec'o'$, ecc. $vm$, $v'm'$; siccome lo mostrano manifestamente anche l'esperienze di molti Idraulici, e in particolare quelle del Sig. Ab. Zuliani (1).

2.° Che il filo $de$ dividendosi, in $e$, nei due fili $eco$, $ec'o'$, questi dovranno lasciare lo spazio $ecc'$ ripieno d'acqua stagnante, e perciò, siccome è dimostrato dall'Alembert nel suo eccellente Saggio sopra la resistenza de' fluidi, la velocità dell'acqua scorrente per $eco$, $ec'o'$ dovrà essere zero, o infinitamente piccola da $e$ fino in $c$, poi da zero in $c$, $c'$ aumentarsi a poco a poco fino in $o$, $o'$, dove sarà massima.

3.° Che la velocità del filo $de$ essendo $c$, e dovendo essere zero, o infinitamente piccola in $e$, e le molecole del filo $de$ non potendo, per la legge di con-

(1) Saggi scientifici e letterarj dell'Accademia di Padova, Tom. III.

tinuità, passare, come si dice, *bruscamente*, o *per salto*, da una velocità finita ad una velocità infinitamente piccola, è manifesto che le dette molecole dovranno incominciare in qualche punto, per esempio $n$, a perdere della loro velocità $c$, finchè, giunte in $e$, essa ne sia interamente distrutta.

### *Moto dell' acqua del Recipiente.*

6. Essendo la sezione $hd$ (fig. 2.) assai maggiore della sezione $aa$, in $hd$ la velocità dell' acqua del Recipiente sarà, o potrà supporsi nulla, o infinitamente piccola, ed in $aa$ avrà la velocità finita $v$ dell' acqua della canna, quando, se non vi fosse la canna, sicchè l' acqua del Recipiente sgorgasse liberamente da $aa$, la velocità in $aa$ sarebbe eguale alla velocità $c$ dovuta all' altezza del livello $hd$ sopra il centro di $aa$. L' acqua del Recipiente dovrà dunque passare gradatamente dalla quiete alla velocità $v$. In fatti fu già osservato, come si sa, da valenti sperimentatori, che ne' vasi inesausti dai quali sgorghi l' acqua per una piccola luce aperta nel fondo, o nella parete; si forma un gorgo $xyeex$, per cui, restringendosi le sezioni $xy$ l' acqua si va appunto accelerando fino alla luce $ee$, o fino ad $aa$, se alla luce $ee$ sia congiunto un tubo conico $ea$.

7. Dai due precedenti paragrafi rendesi manifesto che il moto dell' acqua della vena è diverso dal moto dell' acqua del recipiente, in quanto che per lo scontro del piano $oo'$ (fig. 1.) la velocità $c$ della vena incomincia a sminuirsi nel punto $n$, finchè giunta in $e$ è zero, e zero per tutta la $ec$, $ec'$, e da zero in $c$, $c'$ si aumenta fino in $o$, $o'$, dove è massima. Laddove per lo scontro dell' acqua della canna la velocità dell' acqua del recipiente $ed$ (fig. 2.), ossia d' un filo qualunque $KQPr$ di essa acqua, da zero in $Q$ andrà crescendo a poco a poco fin ad $r$, dove la detta velocità sarà eguale alla velocità $v$ dell' acqua della canna.

A questa differenza vuolsi aggiungere: che la molecola $n$ (fig. 1.) della porzione $dn$ del filo centrale $de$ della vena ha la velocità attuale $c$ (§. 5.) e la molecola $Q$ (fig. 2.) della porzione $KQ$ d' ogni filo $KQPr$ dell' acqua del recipiente ha una velocità soltanto *virtuale*, o di tendenza, eguale alla velocità dovuta all' altezza $QK$.

## II.

### DISSIMIGLIANZA DEGLI URTI.

8. Onde chiaramente si vegga che, per le sopra notate differenze fra il moto dell' acqua della vena, e il moto dell' acqua del recipiente, esser devono, e sono realmente dissimili le espressioni degli urti, passerò a dimostrare, che, per la detta differenza l' urto della vena esser deve, o può supporsi, come si è

fatto fin ora, eguale ad $\frac{a(c-v)^2}{2}$, e l'urto dell' acqua del recipiente esser deve, ed è eguale ad $\frac{a(c^2-v^2)}{2}$.

*Urto della vena.*

9. Egli è facile a comprendere:

1.° che lo sminuimento (§. 5. n.° 3.) del moto del fluido per $ne$ (fig. 1.) non può nascere se non dalla resistenza che il fluido anteriore oppone al detto moto.

2.° Che chiamata $u$ la velocità in $Z$, e $dR$ la resistenza opposta dal fluido anteriore $oceZ$ al moto dell'elemento $Zz$ del filo $nZ$, sarà, per le note leggi del moto ritardato, $dR = -\frac{du.zZ}{dt}$, e perciò $-\frac{u^2}{2}+$ C.te la resistenza $R$ opposta dal fluido $oceZ$ a tutto il fluido $nZ$.

3.° Che la costante deve esser tale, che in $n$, dove (§. 5.) la velocità è costante, il fluido $ocen$ non opponga al fluido $nd$ resistenza alcuna, o ciò che torna allo stesso, che $R$ sia zero quando $v$ è $c$. Sarà dunque $o = -\frac{c^2}{2}+$ C.te; e perciò C.te $= \frac{c^2}{2}$ e quindi $R = \frac{(c^2-u^2)}{2}$.

4.° Che per avere la resistenza opposta dal fluido $oce$ a tutto il fluido $en$ basterà sostituire nella espressione $\frac{(c^2-u^2)}{2}$ in luogo di $u$ la velocità che avrà in $e$. Ora in $e$ la velocità è zero (§. 5.); dunque la resistenza opposta dal fluido $oce$ al fluido $en$ sarà $\frac{c^2}{2}$.

5.° Che essendo zero la velocità in ogni sezione $i$ della $ec$, per la suddetta ragione la resistenza opposta dal fluido $oci$ al posteriore $nei$, sarà $\frac{c^2}{2}$.

6.° Che supposta $v$ la velocità in una sezione qualunque $X$ del filo, o canaletto $co$, la resistenza opposta dal fluido anteriore $oX$ al fluido $necX$ sarà $\frac{c^2-v^2}{2}$

7.° Che, per la resistenza $\frac{c^2}{2}$ opposta in ogni sezione $i$ dal fluido $oci$, il fluido posteriore $nei$ farà in $i$ contro il fluido $ico$ una pressione nella direzione del moto, cioè per $ico$, ed una eguale e normale alla parete $eic$ del canaletto sottilissimo $ec$ ne farà contro il punto $i$ della parete medesima.

8.° Che, per la resistenza $\frac{c^2 - v^2}{2}$ opposta dal fluido o $X$ al fluido $necX$, il fluido $necX$ porterà in $X$ contro il fluido $Xo$ una pressione nella direzione del moto, cioè per $Xo$, ed una eguale ne porterà nel punto $X$ del piano, perpendicolare al piano stesso.

9.° Che le suddette pressioni dovendo essere eguali alle resistenze, e le resistenze nei punti $i$, $X$ essendo $\frac{c^2}{2}$, $\frac{c^2 - v^2}{2}$, anche le pressioni su d'ogni punto $i$, ed $X$ saranno $\frac{c^2}{2}$, $\frac{c^2 - v^2}{2}$.

10.° Che col medesimo ragionamento si troverà che il fluido del filo $nec'o'$ dovrà fare su d'ogni punto della parete $cc'$, $c'o'$ una pressione, e la pressione su d'ogni punto della $cc'$ dovrà esser eguale a $\frac{c^2}{2}$, e la pressione sopra un punto qualunque della $c'o'$ dovrà essere similmente eguale a $\frac{(c^2 - v'^2)}{2}$, supposta $v'$ la velocità su quel punto.

11.° Finalmente 1.° che essendo $\frac{c^2}{2}$ la pressione sopra ogni punto delle $cc$, $cc'$, è manifesto che $cc.\frac{c^2}{2}$, $cc'.\frac{c^2}{2}$, esprimeranno le pressioni sopra le intere $cc$, $cc'$, e perciò $oo'.\frac{c^2}{2}$ sarà la pressione che da quelle verrà fatta sopra $cc'$; 2.° che, essendo $\frac{c^2 - v^2}{2}$, $\frac{c^2 - v'^2}{2}$ le pressioni sui punti delle $co$, $c'o'$ distanti di $x$, $x'$ da $c$, $c'$; e supposti $\int dx\,\frac{(c^2 - v^2)}{2}$, $\int dx'\,\frac{(c^2 - v'^2)}{2}$, due integrali che svaniscano in $c$, $c'$ e si completino in $o$, $o'$, le $\int dx\,\frac{(c^2 - v^2)}{2}$ $\int dx'\,\frac{(c^2 - v'^2)}{2}$ esprimeranno le pressioni sopra $co$, $c'o'$.

10. Ciò premesso e non potendosi dubitare, che l'urto della vena contro la linea $oo'$ del piano non debba consistere unicamente nella pressione che, per le sopra esposte ragioni, il fluido della vena farà sopra la linea $oo'$, si scorgerà ad evidenza, che la vera espressione di quest'urto dovrà essere $cc'.\frac{c^2}{2}$ + $\int dx\frac{(c^2 - v^2)}{2} + \int dx'\frac{(c^2 - v^2)}{2}$, ossia $cc'.\frac{c^2}{2} + 2\int dx\frac{(c^2 - v^2)}{2}$;

imperciocchè, essendo il piano circolare, la $co$ sarà eguale a $c'o'$, ed eguali pure saranno tra loro le velocità nei punti delle $co$, $c'o'$ egualmente distanti da $c$ e da $c'$.

11. Quando il piano è piccolo, ed eguale alla sezione della vena, siccome appunto noi supponiamo (§. 2), si osserva che la $ecc'$ occupa quasi tutta la $oo'$; perciò in tal caso l'urto della vena contro $oo'$ sarà pochissimo minore di $oo'.\frac{c^2}{2}$ e, chiamata $a$ l'area del piano, l'urto su tutto il piano sarà ben poco minore di $a.\frac{c^2}{2}$ e se si vuole anche eguale ad $a.\frac{c^2}{2}$ come si è fin' ora generalmente supposto.

12. Le accurate sperienze del summentovato signor Ab. Zuliani confermano pienamente la giustezza di questa espressione. Da queste sperienze è ad evidenza dimostrato che l'urto della vena orizzontale sopra un piano circolare del diametro della vena stessa è poco minore del peso d'un cilindro d'acqua avente per base l'area del piano, e per altezza quella dovuta alla velocità della vena, (1), il che è quanto dire un poco minore di $a.\frac{c^2}{2}$, chiamando $a$ l'area del piano e $c$ la velocità della vena.

13. Passiamo ora al caso che il piano $oo'$ si muova nel senso della vena con velocità $v$ minore della velocità $c$ della vena medesima.

Suppongasi impressa al piano ed alla vena una velocità eguale ad $v$ in direzione opposta. È manifesto che il piano rimarrà fermo, ed alla vena resterà la velocità $c - v$, e con essa urterà il piano fermo $oo'$. Ma, siccome è dimostrato nella meccanica, una velocità comune a tutto un sistema non altera punto l'azione scambievole delle parti, perciò l'urto della vena, che insegue con velocità $c$ il piano mobile con velocità $v$, sarà perfettamente lo stesso dell'urto ch'essa farebbe sul piano fermo, se contro di esso si movesse con la velocità $c - v$; ora in tal caso l'urto è eguale (§§. 11, 12) all'area $a$ del piano nel mezzo quadrato della velocità della vena, adunque, nel caso che il piano si muova con velocità $v$, l'urto sarà eguale ad $a\frac{(c-v)^2}{2}$; ciò ch'io mi era proposto (§. 8.) di dimostrare.

*Urto dell'acqua del Recipiente.*

14. Supposta $QPnr$ (fig. 2.) la linea per cui si muove (§. 6.) la molecola $Q$, non è difficile a comprendere che il fluido del filo anteriore $ornP$ opporrà al fluido posteriore $PQK$ una resistenza, sebbene in questo caso la velocità per $QPr$ si aumenti (§. 6.).

(1) Saggi dell'Accademia di Padova Tom. III.

A tal uopo basterà l' osservare attentamente:

1.° Che chiamata $g$ la gravità assoluta di una molecola della $Pp$, elemento di $QP$, sarà $g$. $Pp$ la gravità assoluta di tutto l'elemento, e supposta $y$ la distanza verticale del livello $hd$ dal punto $P$, sarà $y + dy$ la distanza dal punto $p$, e $\frac{gdy}{Pp}$. $Pp = gdy$ sarà la porzione della gravità assoluta dell'elemento $Pp$, la quale agirà nella direzione $Pp$ del moto.

2.° Che se la molecola $P$ potesse obbedire liberamente all'azione della forza $\frac{gdy}{Pp}$, dopo il primo istante $dt$ avrebbe la velocità $u + \frac{gdy}{Pp} . dt = u + \frac{gdy}{u}$; per essere $dt = \frac{Pp}{u}$. Ma invece è dimostrato (§. 6.) ch'esso elemento ha la velocità $u + du$.

3.° Che $u + du$ è minore di $u + \frac{gdy}{u}$, o, ciò che torna allo stesso, che $udu$ è minore di $gdy$.

In fatti chiamata $w$ la velocità che acquisterebbe un grave cadendo dall'altezza $y$, è chiaro che $gdy$ sarà $= wdw$, così che per dimostrare che $udu$ è minore di $gdy$ basterà far vedere, che $udu$ è minore di $wdw$, ossia che la velocità $u$ del fluido in un punto qualunque $P$ della $QPr$ è minore della velocità dovuta all'altezza del livello $hd$ sopra il punto $P$.

Ciò premesso, che nel punto $Q$ la velocità $u$ sia minore della velocità dovuta all'altezza $QK$, è evidente, poichè nel punto $Q$ la velocità $u$ è zero (§. 7.). Similmente anche nel punto $r$ la velocità $u$ è minore della velocità dovuta all'altezza del livello $hd$ sopra $r$, ossia della velocità colla quale l'acqua sgorga dalla bocca $o$; imperciocchè nel punto $r$ la velocità $u$ è eguale alla velocità dell'acqua della canna, e la velocità dell'acqua nella canna è minore della velocità colla quale sgorga da $o$, essendo la sezione $aa$ maggiore (§. 2.) della luce $o$.

Ora se in $Q$, ed in $r$ $udu$ è minore di $gdy$ è forza (§. 6.) che in ciascun altro punto $P$ la $udu$ sia minore di $gdy$, e perciò $u + du$ sarà, come dicemmo, minore di $u + \frac{gdy}{u}$.

4.° Che la velocità $u + du$ essendo minore di $u + \frac{gdy}{u}$ la molecola $P$, e ciascun'altra della $Pp$, nel passare da $P$ a $p$ perderà una porzione della velocità $u + \frac{gdy}{u}$; e quella perdita non può farsi se non se per la resistenza che il fluido anteriore $rp$ opporrà al fluido dell'elemento $Pp$.

15. Dopo le quali cose, chiamata $dR'$ quella resistenza, agevolmente si scorgerà:

1.° Che la forza motrice dell' elemento $Pp$ sarà $gdy - dR'$, e l'acceleratrice sarà $\frac{gdy - dR'}{Pp}$; e quindi, per le note formole del moto accelerato, sarà $\frac{gdy - dR'}{Pp} = \frac{du}{dt}$; perciò la resistenza $dR'$, opposta dal fluido anteriore $rp$ all' elemento $pP$ del posteriore $KQP$, sarà $= gdy - \frac{du \,.\, Pp}{dt} = gdy - udu$, per essere $dt = \frac{Pp}{u}$; e $gy - \frac{u^2}{2} +$ C.$^{te}$ sarà la resistenza opposta a tutto il fluido $PQK$.

2.° Che la costante dovrà esser tale che in $Q$, cioè quando $v$ è zero, ed $y$ eguale a $QK$, la resistenza sia $g \,.\, QK$, cioè eguale al peso della colonna $QK$; dunque la C.$^{te} = o$; di modo che la resistenza $R'$ opposta al fluido $PQK$ sarà $gy - \frac{u^2}{2}$.

3.° Che per avere la resistenza opposta dal fluido $or$ a tutto il fluido $rpQK$ basterà nella espressione $gy - \frac{u^2}{2}$ sostituire in luogo di $y$, e di $u$ ciò che diventa $y$, ed $u$ in $r$. Per conseguenza, supposta $v$ la velocità in $r$, ed $\varepsilon$ la distanza di $r$ dal livello $hd$, sarà la resistenza suddetta $= g \,.\, \varepsilon - \frac{v^2}{2}$.

4.° Che, chiamata $\alpha$ l' area $aa$, la resistenza opposta dall' acqua della canna all' acqua del recipiente sarà eguale ad $\alpha \left( g\varepsilon - \frac{v^2}{2} \right)$

5.° Che per la resistenza $\alpha \left( g\varepsilon - \frac{v^2}{2} \right)$ opposta dal fluido della canna al fluido del recipiente, il fluido del recipiente farà contro il fluido della canna una pressione.

6.° Finalmente che quella pressione, dovendo essere eguale alla resistenza, sarà $= \alpha \left( g\varepsilon - \frac{v^2}{2} \right)$

16. Ciò posto, essendo indubitato, che l' urto dell' acqua del recipiente contro l' acqua della canna altro non può essere se non la pressione suddetta, la vera espressione dell' urto ricercato sarà $\alpha \left( g\varepsilon - \frac{v^2}{2} \right)$, ossia $= \alpha \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ supposta $c$ la velocità dovuta all' altezza $\varepsilon$.

17. Anche questa espressione, siccome quella dell' urto della vena (§. 12.) concorda mirabilmente con l' esperienza.

Essendo la canna *ac* cilindrica (§. 2.), la velocità dell'acqua in ogni sezione *ii* sarà eguale alla velocità $v$ nella sezione *aa*, perciò l'urto $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ dell'acqua del recipiente nella sezione *aa* sarà eguale all'urto in ogni sezione *ii*, e conseguentemente (§. 9, n.° 7.) eguale alla pressione su d'ogni punto corrispondente della parete della canna; talmente che l'esperienze le quali dimostrassero essere la pressione sopra una piccola porzione $e$ della detta parete eguale ad $e \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ dimostrerebbero pur anche indubitatamente essere l'urto dell'acqua dal recipiente eguale ad $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$. Ora dalle celebri sperienze di Daniele Bernoulli (1), e d'altri illustri Fisici si raccoglie, che la pressione sopra una porzioncella $e$ della parete di un tubo cilindrico orizzontale *ca*, ristretto nella bocca *cc*, siccome lo è la canna *ca*, e annesso ad un recipiente inesausto *ad*, è appunto eguale ad $e \frac{(c^2 - v^2)}{2}$.

## ESAME DELLA II.ª QUESTIONE.

18. Per decidere fondatamente se sieno intelligibili e concludenti le prove per le quali ho affermato: che la forza motrice dell' acqua nella canna dell'Ariete Idraulico dee computarsi con la formola dell'urto de' fluidi dedotta dalle sperienze colle quali ho impugnata (2) la teoria della resistenza de' fluidi immaginata dal cel. Juan, io credo che basterà una breve esposizione di quanto scrissi su questo argomento nell'*Appendice alle nuove ricerche* ecc.

19. Nei §§. 7, 18 faccio osservare 1.° che quella forza motrice consiste, siccome dissi di sopra (§. 2, 3.), o può supporsi consistere nell'urto dell'acqua di un recipiente *ed* (fig. 2.) contro l'acqua della canna *ac*. 2.° Che la formola dell'urto di un fluido che insegue con velocità $c$ un piano $a$ mobile nella direzione del fluido con velocità minore di $c$, dedotta dalle mie suddette sperienze, è $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ e non già la comunemente adottata $a \frac{(c - v)^2}{2}$.

Da ciò seguendo di legittima conseguenza, che in prova della mia suddetta proposizione io dovea dimostrare che l'urto dell'acqua del recipiente contro l'acqua della canna dee computarsi con la formola $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$, e non con l'al-

(1) Sua Idrodinamica, sezione XII.

(2) Memorie di Fisica e Matematica del reale Istituto Italiano Tom. II. parte 1 e 2.

tra a $\frac{(c-v)^2}{2}$, nei paragrafi susseguenti mi faccio a mostrare essere in fatti a $\frac{(c^2-v^2)}{2}$, e non a $\frac{(c-v)^2}{2}$ la vera espressione dell'urto suddetto.

Le prove, che riferisco a tal uopo, sono tratte dalla sperienza e dalla teorica.

*Prove sperimentali.*

20. Avendo il soprallodato Matematico osservato (1) che la velocità dell'acqua della canna *ac* ( fig. 2. ) dal momento in cui si stura la bocca o, e nel quale la detta velocità è zero ( §. 2.), o quasi nulla, va per un certo tempo aumentando, fino a divenire costante ed equabile, volle con opportuni artificj determinare il tempo nel quale l'acqua della canna acquista la massima, ossia la costante velocità, e la quantità dell'acqua sgorgata nel detto tempo.

Per una canna della lunghezza di 11, 614 metri, e del diametro di 0, 100 metri congiunta ad un tubo conico della lunghezza di 0, 14 metri, e del maggiore diametro di 0, 128 metri essendo l'altezza dell'acqua nel recipiente sopra il centro della bocca di 1, 172 metri ed 1, 168, il rapporto della sezione della bocca a quella della canna, in questo caso, io dissi trovò col mezzo de' suddetti artifizj, il tempo di 4", 5, e la quantità d'acqua di 0, 0684724 metri cubici.

Le prove sperimentali, dalle quali ho dedotto che l'urto dell'acqua del recipiente dee stimarsi con la formula a $\frac{(c^2-v^2)}{2}$, e non già con a $\frac{(c-v)^2}{2}$, consistono in ciò, che tanto il tempo quanto la quantità d'acqua che si ottengono col calcolo fondato sopra l'ipotesi che l'urto dell'acqua del recipiente sia espresso dalla formola a $\frac{(c^2-v^2)}{2}$ sono assai più conformi al tempo ed alla quantità d'acqua data dai suddetti esperimenti, di quello che lo sia il tempo e la quantità d'acqua che si ottiene dalla formola a $\frac{(c-v)^2}{2}$.

In fatti dal suddetto calcolo, esposto nei §§. 24, 25, 26 della accennata Appendice, risulta chiaramente:

1.° Che il tempo dato dalla formula a $\frac{(c-v)^2}{2}$ è circa undici volte maggiore di quello della sperienza, e il tempo dato dalla formola a $\frac{(c^2-v^2)}{2}$ è solamente due volte circa maggiore.

(1) Trattato dell'Ariete Idraulico.

2.° Che la quantità d'acqua data dalla formula $a \frac{(c - v)^2}{2}$ è quasi quindici volte maggiore della quantità d'acqua ottenuta dalla sperienza, e la quantità d'acqua data dalla formola $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ è solamente due volte circa maggiore di quella della sperienza medesima.

Affinchè poi dall'osservare non accordarsi coi risultamenti della sperienza nemmeno quelli della formola $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ non si avesse a temere che ciò fosse perchè la vera espressione dell'urto non sia neppure $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ noi §§. 29, 34, 39 ho fatto riflettere che la differenza potrebbe nascere e nasce realmente dal non essersi nel calcolo del tempo e della quantità d'acqua computata esattamente la resistenza opposta all'acqua della canna dall'attrito delle sue molecole e dall'orlo, o telajo che ne restrinse la bocca.

*Prove teoriche.*

21. Le prove teoriche sono (§. 31, 32.) che l'urto dell'acqua del recipiente stimato con la formola $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ è perfettamente conforme all'urto che ne porge la più esatta e sicura teoria.

Investigando nella nota al §. 32 posta in fine dell'Appendice coi veri principj meccanici ricevuti dai più insigni matematici, e indipendentemente da ogni teorica dell'urto de' fluidi, l'urto dell'acqua del recipiente inesausto *ed* contro l'acqua della canna orizzontale *ae* ho trovato essere il detto urto eguale appunto ad $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ e non già ad $a \frac{(c - v)^2}{2}$.

*Osservazioni sopra la formola* $a \frac{(c^2 - v^2)}{2}$.

22. $o'a$ (fig. 1.) rappresenti il profilo d'un piano rettangolare verticale che si muova orizzontalmente con la velocità costante $v$ per la direzione *de* immerso nell'acqua stagnante a indefinita profondità; è chiaro che l'acqua correrà dietro al piano, e ne urterà la faccia posteriore $o'o$.

Sia $a$ una picciolissima porzione dell'area $o'o$ presa nel mezzo di detta faccia, ed $s$ esprima la distanza del centro dell'ajuola $a$ dalla superficie $ST$ dell'acqua stagnante; e $c$ sia la velocità dovuta all'altezza $s$.

Dalle sperienze, colle quali ho impugnata la *Teoria della resistenza de' fluidi* del Sig. Juan, si scorge (1) che l' espressione dell' urto contro l' ajuola $\alpha$ è molto più conforme ad $\alpha \frac{(c^2 - \nu^2)}{2}$ che ad $\alpha \frac{(c - \nu)^2}{2}$.

Da ciò ne inferii che la vera espressione dell' urto del fluido contro un piano $\alpha$ mobile nella direzione del fluido è $\alpha \frac{(c^2 - \nu^2)}{2}$ e non già la comunemente adottata $\alpha \frac{(c - \nu)^2}{2}$.

23. Ora che questa illazione sia giusta e legittima per riguardo all'urto dell' acqua del recipiente ( fig. 2. ) contro l' acqua della canna chiaramente apparisce dai §§. nei quali si vede che la vera espressione di quell' urto è appunto $\alpha \frac{(c^2 - \nu^2)}{2}$.

24. Che poi la conseguenza medesima sia egualmente giusta anche rispetto all' urto della vena parvemi (2) di poterlo affermare in forza del seguente discorso:

Se il piano $o'a$ ( fig. 1. ) fosse fermo, l' ajuola $\alpha$ soffrirebbe una pressione eguale ad $\alpha \cdot \epsilon$, ossia eguale ad $\alpha \cdot \frac{c^2}{2}$. Se un egual piano verticale fosse esposto all' azione di una vena orizzontale la cui sezione sia eguale all' area $\alpha$ del piano, per l' esperienze ( §. 12. ) il piano medesimo soffrirebbe un urto eguale ad $\alpha \frac{c^2}{2}$.

Poniamo ora che il piano $o'a$ si muova con velocità $\nu$ nella direzione $de$, per le mie sperienze ( §. 22. ) l' urto contro l' ajuola $\alpha$ sarebbe $\alpha \frac{(c^2 - \nu^2)}{2}$; dunque del pari anche l' urto della vena contro il piano $\alpha$, il quale si muovesse con velocità $\nu$ per la direzione della velocità $c$ della vena, dovrà essere $\alpha \frac{(c^2 - \nu^2)}{2}$ e non già $\alpha \frac{(c - \nu)^2}{2}$.

A confermarmi in tale opinione concorreva la similitudine tra il moto dell' acqua $STT'S'$ che corre dietro al piano $o'a$, ed il moto dell'acqua della vena $hoo'h'$.

(1) §§ 5, 49, 57, 77, delle mie osservazioni sopra la Teoria di Juan inserite nel Tomo II. parte 1. e 2. delle Memorie di Fisica e Matematica del reale Istituto Italiano,

(2) §§. 6, 7, 8, 9 della *Memoria sopra l'urto de' fluidi*.

In tutti due i casi si osserva che l'acqua del filo centrale *de* si muove per le linee *neco nc'c'*. Dal che, e dai ragionamenti dei §§. 9., 10., 12., 13., parrebbe che si potesse giustamente desumere che se l'urto contro l'ajuola $=$ della faccia o'o del piano moventesi per l'acqua stagnante è espresso, secondo che lo mostrano gli sperimenti, da $= \frac{(c^2 - v^2)}{2}$, dalla stessa formula dovesse essere espresso anche l'urto della vena. Ma dalle cose esposte nei suddetti §§. chiaramente risulta che a tal fine bisognerebbe ancora che la velocità $c$ della vena fosse una velocità *virtuale*, siccome lo è (§. 22.) la velocità $c$ dell'acqua $STTS'$. Da ciò, e dal §. 13. si dovrà dunque conchiudere, che l'urto della vena si avrà, come si è fatto fin' ora, a misurare con la formula $= \frac{(c - v)^2}{2}$ e ciò per la ragione che la velocità $c$ è una velocità effettiva.

25. Ma per questo non rimarrà certamente men vero, essere inconcludente e fallace il discorso col quale si crede di aver provato che la forza motrice dell'acqua nella canna dell'Ariete Idraulico debbasi misurare con la formula $= \frac{(c - v)^2}{2}$, ed all' opposto essere chiare e concludenti le prove per le quali ho affermato che la detta forza deve stimarsi con la formola $= \frac{(c^2 - v^2)}{2}$.

In fatti egli è evidente che a dimostrare la verità di queste due proposizioni bastava solo ch'io avessi ad evidenza e con precisione provato che l'urto dell'acqua del recipiente (fig. 2.) contro l'acqua della canna vuol essere computato con la formola $= \frac{(c^2 - v^2)}{2}$ e non già con la comune $= \frac{(c - v)^2}{2}$. Che poi io l' abbia in effetto chiaramente e validamente provato, io credo che per le cose dette ai §§. 18., 19., 20., 21. nessuno potrà dubitarne.

*Questo Supplemento fu letto all' Ateneo di Padova nella Seduta del giovedì 11 Marzo 1815.*

dato p. 124 (v. indici)



## Appendice al §. 82.

*Sopra un nuovo metodo per ritrovare la velocità de' bastimenti mossi dall' azione de' remi.*

Dal § 82 risulta che, considerando il centro di resistenza delle pale de' remi nel punto indicato dai nostri sperimenti, non in quello che porgono le formole, di cui si fece uso fin' ora, si deve ottenere la velocità della nave più prossima alla vera. Essendomi riuscito di rinvenire un' espressione di questa velocità anche più esatta in grazia d' un nuovo metodo che ho tenuto nell' investigarla un pò diverso da quello dell' Eulero *(a)*, mi fo coraggio ad esporre questo metodo come appendice al § 82.

Sia $ab$ (fig. 8) il remo, ed $=c$,

$f$ la forcola o l' ipomoclio, ed $af=b$,

$b$ il vero centro di resistenza della pala del remo, ed

$fb=a$.

Le braccia del remigante spingano il remo in $a$ per la $aa'$ normale ad $ab$ con forza $=p$, la pala si muoverà nella direzione $bb'$, e incontrerà resistenza; donde si comprenderà facilmente che, potendosi a cagione di questa resistenza considerare il remo $ab$ come un vette con l' ipomoclio in $b$, il punto $f$ del ba-

*(a) Scientia navalis. cap. de actione remorum.*

stimento sarà spinto nella direzione $fk$ normale ad $af$ da forza $p \frac{(af + bf)}{bf}$; e il punto $a$ del bastimento stesso, ove posano i piedi del remigante, sarà da' piedi stessi spinto nella direzione $aa''$ da forza uguale a quella delle braccia, ossia da $p$.

Ma un corpo spinto in due punti, e in direzioni che non passino pel centro di gravità incomincia a muoversi intorno a quel punto che chiamasi *centro spontaneo di rotazione*; quindi anche il bastimento incomincierà a muoversi intorno ad un punto, che dovrà essere nella linea $af$ tra $a$ ed $f$, poichè i punti $a$, $f$ devono muoversi nelle direzioni trà loro opposte $aa''$ $fk$, e normali ad $af$. Supposto un tal punto in $o$ è manifesto che si potrà supporre il bastimento come un pendolo oscillante intorno ad $o$, e se da $o$ pel centro di gravità G si menerà la indefinita $o$G X, il centro di oscillazione sarà in un punto della $o$X, per esempio in Q dove, per la nota proprietà di questo punto, supposto applicato un ostacolo nella direzione opposta al moto di Q, il bastimento si fermerebbe, e dove all' opposto applicata una forza Q agente nella direzione del moto di Q, si comunicherebbe al bastimento il moto eccitatovi dal remo. Suppongasi la direzione della forza Q espressa da Q$q$ perpendicolare alla $o$X. Si prolunghi la Q$q$ sino alla linea $ab$, che vada ad incontrarla per esempio in $p$; e la Q$p$ si prolunghi ancora oltre la $ab$ di maniera che sia $ph = Qq = Q$. La forza Q espressa dalla $ph$ si scompone nelle forze $pl$ normale al remo, e sarà $= \frac{Q \cdot Qo}{po}$, e $pn$ parallela al remo stes-

so, e sarà $= \frac{Q \cdot pQ}{po}$, per la similitudine de' triangoli $plh$, $pQo$. Ora la porzione $\frac{Q \cdot Qo}{po}$ della forza Q applicata in $p$ sarà quella che ecciterebbe nel remo il moto intorno ad $f$ comunicatogli dalla forza $p$ applicata in $a$. Quindi sarà

$$\frac{Q \cdot Qo}{po} \cdot pf = p \cdot af,$$

e perciò il fulcro $f$ premuto nella direzione $fk'$ da una forza uguale a

$$p + \frac{Q \cdot Qo}{po};$$

che dovrà essere uguale alla forza

$$p\left(\frac{af + fb}{fb}\right),$$

quindi avremo

$$\frac{Q \cdot Qo}{po} + p = p\left(\frac{af + fb}{fb}\right)$$

ossia $\frac{Q \cdot Qo}{po} \cdot fb + p \cdot fb = p \cdot af + p \cdot fb$,

ossia $\frac{Q \cdot Qo}{po} = p \cdot \frac{af}{fb}$. Ma abbiamo ancora

$\frac{Q \cdot Qo}{pf} = p\frac{af}{pf}$, perciò $\frac{p \cdot af}{pf} = \frac{p \cdot af}{fb}$, ossia

$pf = fb$, quindi si vede che $p$ cadrà in $b$, perciò $po$

$= b\,o$, quindi $\frac{Q \cdot Q\,o}{b\,o} = p \cdot \frac{a\,f}{b\,f} = \frac{p.b}{a}$, o veramente, calata dal centro di gravità G la GH normale ad $a\,f$, sarà, per la similitudine de' triangoli $G\,H\,o$, $Q\,p\,o$, $\frac{Q \cdot Q\,o}{b\,o} = \frac{Q \cdot H\,O}{G\,O}$, e $Q = \frac{p.b}{a} \cdot \frac{G\,O}{H\,O}$, espressione della forza che muove il bastimento agendo in Q' nella direzione $b$ Q', e l'istessa di quella ritrovata con altro metodo dal celebre Eulero.

Adunque l'azione del remo nella forcola, e quella de' piedi del remigante sul bastimento si riducono alla sola forza $\frac{p \cdot b}{a} \cdot \frac{G\,O}{H\,O}$ applicata in Q' nella direzione $b$ Q'. Per questa forza il bastimento piglierebbe due moti, uno di rotazione intorno all'asse che passerebbe pel centro di gravità, l'altro di progressione per cui il centro di gravità progredirebbe nella retta $G\,z$, parallela alla $b$ Q'.

Scompongasi questa forza $\frac{p \cdot b}{a} \cdot \frac{G\,O}{H\,O}$ nelle due, una parallela al remo, e sarà $= \frac{p.b}{a} \cdot \frac{G\,H}{H\,O}$, l'altra perpendicolare al remo, e sarà $= \frac{p \cdot b}{a}$. Sia $m:n$ la ragione del seno al coseno dell' angolo che forma il remo $a\,b$ colla spina MN. La forza $\frac{p.b}{a}$ si scomporrà ancora in

due, una parallela alla spina, e sarà $\frac{mp.b}{a}$, l' altra normale, e sarà $\frac{np.b}{a}$. Parimente la forza parallela al remo ed $= \frac{p.b}{a} \cdot \frac{CH}{HO}$ si scomporrà in una parallela alla spina, e sarà $\frac{np.b}{a} \cdot \frac{CH}{HO}$, ed in un' altra perpendicolare alla spina, e sarà $= \frac{mp.b}{a} \cdot \frac{CH}{HO}$, ma avvertiamo che la forza parallela al remo non agisce nel bastimento, potendo scorrere il bastimento istesso liberamente lungo il remo. Resteranno adunque le sole due forze $\frac{mp.b}{a}$, $\frac{np.b}{a}$.

Ma se nel bordo opposto del bastimento vi fosse un' altro remo uguale, e nella posizione medesima del remo $ab$, anche dall' azione di quello nascerebbero le due forze $\frac{mp.b}{a}$, $\frac{np.b}{a}$, ma le perpendicolari alla spina si opporranno direttamente, resteranno adunque le due $\frac{mp.b}{a}$, $\frac{mp.b}{a}$ cospiranti verso la medesima plaga lungo la spina. Quindi l' espressione della forza accelleratrice del bastimento sarà $2\frac{mp.b}{a}$. E supposto retto l' angolo che forma il remo colla spina,

$\psi$ il numero de' remiganti che agiscono in una volta sopra uno de' bordi, sarà la forza motrice $= 2\,\psi\,\frac{p.b}{a}$.

Ma pel moto uniforme dovrà essere $2\,\psi\,\frac{p.b}{a} =$ alla resistenza della prora che è $= \frac{M}{V}\,ff\,v$, supposta $v$ l'altezza dovuta alla velocità progressiva del bastimento, perciò sarà $2\,\psi\,\frac{p.b}{a} = \frac{M}{V}\,ff\,v$; ma $p = p\,(1 - \frac{u'}{g})$, supposta $u'$ l'altezza dovuta alla velocità delle braccia de' remiganti (*Eulero opera citata*), perciò $2\,\psi\,p\,(1 - \frac{u'}{g})\,\frac{b}{a} = \frac{M}{V}\,ff\,v$.

Ora non ci resta che a ritrovare $u'$.

Ne' metodi di ritrovare $u'$ consiste la differenza de' risultati tra la mia, e la formola dell' Eulero esprimente le leggi del moto del bastimento. Ecco come io ritrovo $u'$.

E' certo che il remo $a\,b$ muovendosi in $f$ nella direzione $f\,k$, ed in $b$ nella direzione $b\,b'$, normali ambedue alla $f\,b$ incontrerà colla pala una resistenza che sarà $= \frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u$, supposta $g\,h$ l'area della pala, $u$ l'altezza dovuta alla sua velocità, ed il punto $f$ incontrerà una resistenza $= \frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}$. Potremo adunque sup-

porre il remo $a\,b$ come una verga rigida posta sopra un piano levigatissimo, e gravata in $f$, e $b$ da' pesi, o masse $\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}$, $\frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u$ e urtata in $a$ da una potenza.

Questa potenza, non agendo tra $f$, e $b$ in sito che lasci da ambe le parti forze d' inerzia uguali, farà muovere la verga intorno a quel punto che sarà trà $f$, e $b$, per esempio in $o'$, e che dà dinamici è parimente chiamato *centro spontaneo di rotazione*; sarà perciò la distanza

$a\,o' = \frac{a\,b^2\,.\,B + a\,f^2\,.\,F}{a\,b\,.\,B + a\,f\,.\,F}$, supposte B, F le masse, o pesi de' corpi, che per noi sono $\frac{M}{V}\,g\,h\,u$, $\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}$, quindi supposto $f\,o' = x$ sarà

$$a\,o' = b + x = \frac{c^2\,.\,\frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u + b^2\,.\,\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}}{c\,.\,\frac{M}{V}\,g\,h\,.\,u + b\,.\,\frac{M}{V}\,\frac{ff\,v}{2\,\psi}}$$

ma $x : \sqrt{v} = a - x : \sqrt{u}$, quindi $u = \left(\frac{a-x}{x}\right)^2 v$;

perciò sostituendo, e riducendo si avrà

$$x = \frac{a}{1 + \sqrt[3]{\frac{ff\,b}{2\,\psi\,.\,g\,h\,.\,c}}}\,.$$

Ora riflettiamo che fatto $g\,h = \infty$, diventa $x = a$, e fatto $ff = \infty$, diventa $x = o$, come è di dovere.

Per ritrovare $u'$ considero che la velocità attiva delle braccia de' remiganti è uguale alla velocità rotatoria di $a$ intorno ad $o'$, meno la velocità progressiva del Bastimento $= \sqrt{v}$, quindi $\sqrt{u'} = \left(\frac{b+x}{x}\right)\sqrt{v} - \sqrt{v}$

$= \frac{b}{x}\sqrt{v}$, ed $u' = \frac{b^2}{x^2} \cdot v = \frac{b^2}{a^2}\left(1 + \sqrt[3]{\frac{ffb}{1\psi gh.c}}\right)^2 v$;

perciò sostituendo nell' equazione $2\psi p\left(1 - \frac{u'}{\vartheta}\right)\frac{b}{a} = \frac{M}{V} ff$.

il valore di $u'$, e riducendo si avrà

$$v = \frac{2\psi p \cdot \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3}\ \frac{M}{V} ff + \frac{2\psi}{\vartheta} p\left(2 + \sqrt[3]{\frac{ffb}{2\psi c.gh}}\right)^2}$$

e supposti ad $\frac{M}{V}$, $p$, $\vartheta$ i valori adottati dall' Eulero,

si avrà $v = \dfrac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} ff + \psi\left(1 + \sqrt[3]{\frac{bff}{2\psi gh.c}}\right)^2}$,

formola che differisce da quella dell' Eulero.

Supposto $gh = \infty$, si avrà $v = \dfrac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} \cdot ff + \psi}$.

istessa della formola del chiaro autore come deve esse-

re, poichè in questo caso il punto $o'$ caderebbe in $b$, e pel metodo dell'Eulero, e pel nostro.

Dal fin qui detto risulta, che secondo i nostri principj la formola regolatrice del moto d' un bastimento a remi sarebbe

$$v = \frac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} ff \psi + \left(1 + \sqrt[3]{\frac{b ff}{2 \psi g h . c}}\right)^2},$$

quando per i principj dell' Eulero dovrebb' essere

$$v = \frac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{ff \left[ \frac{a^3}{b^3} + \left( \sqrt{\frac{1}{2 g h}} + \sqrt{\frac{ff}{\psi}} \right)^2 \right]}$$

A conoscere quale delle due formole sia la più esatta sceglieremo l' esempio stesso dell' Eulero d' una galera che percorreva in un secondo $7 \frac{1}{2}$ pied. ren.

Supposto col mentovato autore che per l' addotto esempio sia

$$\frac{\psi}{ff} = 2,56$$

$$\psi = 3 \frac{1}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2};$$

lo spazio percorso dalla galera in un secondo dovrebbe essere per la nostra formola

di $6 \frac{5410}{6000}$ pied. ren.

e per quella dell' Eulero

di $6 \frac{7}{12}$ pied. ren.

Laonde l' espressione della velocità del bastimento a remi ritrovata col nostro metodo può tenersi più esatta di quella che somministra il metodo dell' Eulero.

La formola $$v = \frac{\psi \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^3}{b^3} \frac{ff}{\psi} + \left(1 + \sqrt[3]{\frac{ff\, b}{2\psi\, g\, h\, .\, c}}\right)^2}.$$

è veramente un pò troppo complicata per ritrovare la miglior proporzione delle parti esterna, e interna del remo, che dia la massima velocità.

Il mezzo più spedito, e meno laborioso è quello di suppore ad $a$, oppure a $b$ sotto un costante valore di $ff$, $gh$, $\psi$, varj valori, e vedere per quale di questi si ottenga la massima $v$.

Supposti adunque

$ff = \frac{640}{729}$, $\psi = 303$, $gh = 1$ pied. quad.

ed $a : b = 8 : 1$ Sarà $v = 25,21$

$a : b = 9 : 1$ $v = 25,28$

$a : b = 93 : 10$ $v = 25,0$

Il che ci dimostra che per far correre colla massima velocità un bastimento per cui si avesse

$$\psi = 303\ ,\ ff = \frac{643}{729}\ ,\ g\,h = 1$$

converrebbe che la proporzione delle parti esterna, ed interna de' remi fosse di 9 : 1 .

| *Pagina* | *Linea* | *Errori* | *Correzioni* |
| --- | --- | --- | --- |
| 42 | 2 | io | in |
| 62 | 15 | permettere | premettere |
| 64 | 23 | il $\gamma$ | in $\gamma$ |
| 71 | 4 | dalle | delle |
| 86 | 17 | per cose | per le cose |
| 98 | 18 | indetermitata | indeterminata |
| 103 | 7 | palla | pala |
| 114 | 18 | $\mathrm{R}\, u\, b$ | $\mathrm{R}\, u\, (b' + \lambda)$ |
| 120 | 7 | la | lo |

Fig 3

Fig 15

Fig 5.
C
K
M
X
N
L
G
40
50
60
70

M
m
M'
Fig. 6
L'
V
O
G
R
L
Z

Fig. 4